

Transport optimal et interpolation de formes

Claire Martin Hugo Bernard

Résumé. Nous proposons une méthode d'interpolation entre deux formes fondée sur le transport optimal. Elle reste stable lorsque les topologies diffèrent, et son coût de calcul croît linéairement avec le nombre de points.

1. Introduction

Comparer deux formes revient souvent à mesurer l'effort nécessaire pour déplacer l'une sur l'autre. Le transport optimal donne à cette idée un cadre précis : on cherche l'application qui déplace la masse au moindre coût.

Les méthodes classiques d'interpolation, fondées sur une correspondance point à point, échouent dès que les formes n'ont pas la même topologie. Le transport optimal, lui, ne suppose aucune correspondance : il la calcule.

2. Formulation

Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Le problème de Monge cherche une application T qui pousse μ sur ν :

$$\min_{T_{\#}\mu=\nu} \int_{\mathbb{R}^d} \|x - T(x)\|^2 d\mu(x). \quad (1)$$

Sa relaxation, due à Kantorovich, porte sur les couplages π de marges μ et ν :

$$W_2^2(\mu, \nu) = \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int \|x - y\|^2 d\pi(x, y). \quad (2)$$

Théorème (Brenier). *Si μ est absolument continue, le problème Équation 2 admet une unique solution, portée par le graphe de $T = \nabla\varphi$, où φ est une fonction convexe.*

L'interpolation de McCann relie alors continûment les deux formes :

$$\mu_t = ((1-t) \text{Id} + tT)_{\#}\mu, \quad t \in [0, 1]. \quad (3)$$

3. Calcul

Nous régularisons le problème par l'entropie, ce qui conduit à l'algorithme de Sinkhorn. Avec $K = e^{-C/\varepsilon}$, les itérations s'écrivent

$$a^{(k+1)} = \frac{\mu}{Kb^{(k)}}, \quad b^{(k+1)} = \frac{\nu}{K^{\top}a^{(k+1)}}, \quad (4)$$

et le couplage s'obtient par $\pi = \text{diag}(a)K \text{diag}(b)$. Chaque itération ne demande que des produits matrice-vecteur.

4. Résultats

Sur l'ensemble de nos exemples, la méthode préserve les détails fins tout en évitant les artefacts de repliement observés avec les approches classiques.

Méthode	Points	Temps (s)	Erreur
Correspondance directe	10^4	0,8	0,112

Sinkhorn (ours)	10^4	1,3	0,031
Sinkhorn (ours)	10^5	12,9	0,029

5. Conclusion

Le transport optimal fournit une interpolation naturelle entre formes de topologies différentes. Nous étudierons ensuite le cas de formes animées.

Références

C. Villani, *Optimal Transport: Old and New*, Springer, 2009.

M. Cuturi, Sinkhorn Distances, *NeurIPS*, 2013.